INTERNATIONAL JOURNAL OF INDIAN LANGUAGE RESEARCH STUDIES (IJILRS)
(Open Access, Double-Blind Peer Reviewed Journal)
ISSN Online: 3108-1797 ISSN Print: 3139- 3799
EDUSCHOOL ACADEMIC RESEARCH & PUBLISHERS

संस्कृतवाङ्मये गणितशास्त्रस्य योगदानम्

Lathakumary. P. C

Associate professor, Department of Sanskrit, St. Thomas college, Pathanamthitta, Kerala, India.

Article information
Received: 12th March 2026
Received in revised form: 2nd April 2026
Accepted: 19th May 2026
Available online: 25th June 2026
Volume: 2
Issue: 2
DOI: https://doi.org/10.63090/IJILRS/3108.1797.0019

सारांशः

भारतीयसभ्यतायां गणितशास्त्रस्य दीर्घा समृद्धा च परम्परा वर्तते, या वैदिककालादारभ्य मध्यकालपर्यन्तं सहस्रत्रयाधिकवर्षाणि यावत् विस्तृता अस्ति। संस्कृतभाषायां रचिताः गणितग्रन्थाः विश्वगणितस्य विकासे अत्यन्तं महत्त्वपूर्णं योगदानम् अकुर्वन्। शुल्बसूत्रेषु ज्यामितिविद्यायाः प्राचीनतमं व्यावहारिकं स्वरूपं प्राप्यते, यत्र वेदिनिर्माणार्थं विविधानि ज्यामितीयसूत्राणि सप्रमाणं प्रतिपादितानि। शून्यस्य आविष्कारः, दशमानस्थानकपद्धतेः विकासः, त्रिकोणमितिसिद्धान्तानां प्रतिष्ठापनम्, अनिर्धार्यसमीकरणानां समाधानविधयः, कलनगणितस्य आधारभूतावधारणानां प्रतिपादनम्, अनन्तश्रेणीनां सिद्धान्ताश्च भारतीयगणितज्ञानां मुख्यानि योगदानानि सन्ति। आर्यभटः, ब्रह्मगुप्तः, भास्कराचार्यः, सङ्गमग्रामस्य माधवः इत्यादयः गणितज्ञाः संस्कृतभाषायां पद्यरूपेण गणितसूत्राणि रचयित्वा अद्वितीयां ज्ञानपरम्पराम् अस्थापयन्। अस्मिन् शोधपत्रे संस्कृतवाङ्मये गणितशास्त्रस्य सम्पूर्णस्य योगदानस्य समग्रं विस्तृतं च मूल्याङ्कनं क्रियते, वैदिककालतः आरभ्य केरलीयगणितपरम्परापर्यन्तं विविधानि प्रमुखानि योगदानानि सविस्तरं विश्लेष्यन्ते, तथा च विश्वगणिते भारतीयगणितस्य दूरगामी प्रभावः सम्यक् समीक्ष्यते। अयं शोधलेखः प्राथमिकस्रोतसां द्वितीयकस्रोतसां च विश्लेषणे आधारितः अस्ति।

Abstract

Indian civilization has a long and rich tradition of mathematics, spanning more than three thousand years from the Vedic period to the Middle Ages. The mathematical texts written in Sanskrit made a very important contribution to the development of world mathematics. The Shulba Sutras contain the oldest practical form of geometry, where various geometric formulas for the construction of altars are proved. The discovery of zero, the development of the decimal place method, the establishment of the theories of trigonometry, the methods of solving indeterminate equations, the presentation of the basic concepts of calculus, and the theories of infinite series are the main contributions of Indian mathematicians. Mathematicians like Aryabhatta, Brahmagupta, Bhaskaracharya, Madhava of Sangamgram etc. established a unique tradition of knowledge by composing mathematical formulas in verse form in Sanskrit. This paper makes a comprehensive and detailed assessment of the entire contribution of mathematics to Sanskrit literature, analyzes in detail various major contributions from Vedic times to the Kerala mathematical tradition, and thoroughly reviews the far-reaching impact of Indian mathematics on world mathematics. This research article is based on the analysis of primary sources and secondary sources.

मुख्यशब्दाः - गणितशास्त्रम्, संस्कृतम्, आर्यभटः, ब्रह्मगुप्तः, भास्कराचार्यः, शुल्बसूत्राणि, शून्यम्, दशमानपद्धतिः

1. प्रस्तावना

भारतीयज्ञानपरम्परायां गणितशास्त्रं सर्वदा सर्वोच्चं महत्त्वपूर्णं स्थानम् अधिगच्छति। प्राचीनभारते गणितं केवलं व्यावहारिकविद्या नासीत्, अपितु दार्शनिकचिन्तनेन आध्यात्मिकज्ञानेन च सह अन्विताय विद्यायै गण्यते स्म। वेदाङ्गज्योतिषे गणितस्य महत्त्वं स्पष्टतया प्रतिपादितम् 'यथा शिखा मयूराणां नागानां मणयो यथा। तद्वद् वेदाङ्गशास्त्राणां गणितं मूर्धि वर्तते॥' इति।[2] अनेन सुप्रसिद्धेन श्लोकेन गणितस्य सर्वश्रेष्ठत्वं वेदाङ्गेषु सुस्पष्टतया प्रतिपाद्यते। यथा मयूरस्य शिखा सर्वाङ्गेषु श्रेष्ठा, तथैव वेदाङ्गशास्त्रेषु गणितं सर्वश्रेष्ठम् इति अस्य भावः। संस्कृतभाषा गणितज्ञानस्य संरक्षणे संवहने प्रसारणे च अद्वितीयं सशक्तं माध्यमम् अभवत्। अस्याः भाषायाः वैज्ञानिकसूक्ष्मता व्याकरणिकनियमबद्धता च गणितसूत्राणां यथार्थप्रतिपादने अत्यन्तम् उपयुक्ता आसीत्।[14]

संस्कृतवाङ्मये गणितग्रन्थानां रचनायाः एका अत्यन्तं विशिष्टा अद्वितीया च परम्परा वर्तते गणितसूत्राणां पद्यरूपेण छन्दोबद्धतया रचना। आर्यभटस्य आर्यभटीयम्, ब्रह्मगुप्तस्य ब्राह्मस्फुटसिद्धान्तः, भास्कराचार्यस्य सिद्धान्तशिरोमणिः इत्यादयः सर्वे प्रमुखग्रन्थाः आर्याच्छन्दसि श्लोकच्छन्दसि वा रचिताः सन्ति।[1] एतेषु ग्रन्थेषु गणितसूत्राणि सुगमतया कण्ठस्थीकरणयोग्यानि, मौखिकपरम्परायां दीर्घकालं यावत् संरक्षणयोग्यानि च भवन्ति। अयं पद्यरूपः गणितज्ञानस्य पीढीपरम्परया प्रसारणे अत्यन्तं सहायकः अभवत्, येन सहस्रवर्षाणि यावत् गणितपरम्परा अविच्छिन्नतया प्रवर्तमाना आसीत्। अस्याम् अद्भुतायां परम्परायां गणितस्य काव्यस्य च सुन्दरं सम्मेलनं दृश्यते, यत् विश्वस्य अन्यासु सभ्यतासु विरलम् एव प्राप्यते।[14]

भारतीयगणितपरम्परायाः कतिपयानि योगदानानि विश्वगणितस्य इतिहासे सत्यमेव युगान्तरकारिणि सन्ति। शून्यस्य सम्पूर्णा अवधारणा, दशमानस्थानकपद्धतिः (place-value decimal system), त्रिकोणमितिसारण्यः (trigonometric tables), अनन्तश्रेणीनां सिद्धान्ताः, अनिर्धार्यसमीकरणानां (indeterminate equations) व्यवस्थितं समाधानम् इत्यादीनि तादृशानि महत्तरानि योगदानानि सन्ति, यानि आधुनिकगणितस्य आधुनिकविज्ञानस्य च आधारशिलारूपाणि भवन्ति।[6] एतानि सर्वाणि योगदानानि अरबविद्वद्भिः मध्यमेन पश्चिमएशियां ततः यूरोपदेशं प्राप्तानि, तत्र 'Hindu-Arabic numeral system' इति नाम्ना विश्वप्रसिद्धानि जातानि।[17] आधुनिककाले गणितेतिहासकारैः भारतीयगणितस्य एतत् योगदानं पुनर्मूल्याङ्कितं भवति, तस्य विश्वगणिते प्रभावस्य वास्तविकं स्वरूपं प्रकाशितं भवति च।[10] अस्मिन् शोधपत्रे एतेषां सर्वेषां योगदानानां विस्तृतं सुव्यवस्थितं च विवेचनं प्रस्तूयते।

2. वैदिककाले गणितम्

भारतीयगणितस्य प्राचीनतमं सुव्यवस्थितं स्वरूपं शुल्बसूत्रेषु प्राप्यते। शुल्बसूत्राणि कल्पसूत्राणाम् अन्तर्गतानां श्रौतसूत्राणाम् अंशरूपाणि सन्ति, यानि यज्ञवेदिनिर्माणार्थं विविधानि ज्यामितीयनियमान् सूत्ररूपेण प्रतिपादयन्ति। 'शुल्ब' इति शब्दस्य अर्थः 'रज्जुः' (rope/cord) इति अस्ति, यतः वेदिनिर्माणे रज्ज्वा मापनं क्रियते स्म।[12] बौधायनशुल्बसूत्रम् (अनुमानतः अष्टमशताब्दी ख्रीष्टपूर्वम्) सर्वाधिकं प्राचीनं विस्तृतं च शुल्बसूत्रम् अस्ति। आपस्तम्बशुल्बसूत्रम्, कात्यायनशुल्बसूत्रम्, मानवशुल्बसूत्रम् च अन्यानि प्रमुखानि शुल्बसूत्राणि सन्ति।[15] एतेषु सूत्रेषु वर्गस्य, आयतस्य, वृत्तस्य, त्रिकोणस्य, समलम्बस्य च क्षेत्रफलगणनाविधयः सविस्तरं प्रतिपादिताः। एकस्य आकृतेः अन्याम् आकृतिं समानक्षेत्रफलेन परिवर्तनस्य विधयश्च प्रतिपादिताः यथा वर्गस्य वृत्तं, वृत्तस्य वर्गं, आयतस्य वर्गम् इत्यादि।[12]

बौधायनशुल्बसूत्रे एकं गणितेतिहासस्य सर्वाधिकं महत्त्वपूर्णं सूत्रं प्राप्यते 'दीर्घचतुरश्रस्याक्ष्णयारज्जुः पार्श्वमानी तिर्यङ्मानी च यत् पृथग्भूते कुरुतस्तदुभयं करोति' इति।[12] अस्य सूत्रस्य स्पष्टः अर्थः अस्ति यत् आयतस्य (rectangle) विकर्णरज्जुः (hypotenuse) तत् क्षेत्रफलं करोति यत् दीर्घभुजया (length) क्षुद्रभुजया (breadth) च पृथक् पृथक् क्रियमाणं मिलित्वा भवति। अयं सिद्धान्तः पाइथागोरस-प्रमेयस्य (Pythagorean theorem) स्पष्टं पूर्वरूपम् अस्ति। बौधायनस्य कालः ग्रीकगणितज्ञस्य पाइथागोरसतः (c. 570-495 BCE) शताब्दीभिः पूर्वम् इति अनेके विद्वांसः स्वीकुर्वन्ति।[15] फ्रिट्स् स्टाल् (Frits Staal) इत्यनेन वैदिकज्यामितेः ग्रीकज्यामितेः च तुलनात्मकम् अध्ययनं कृतम्, यत्र उभयोः परम्परयोः स्वतन्त्रविकासः प्रतिपादितः।[15]

बौधायनेन √2 (द्वयस्य वर्गमूलम्) इत्यस्य मूल्यम् अपि अत्यन्तं सूक्ष्मतया प्रदत्तम्। सः प्रतिपादयति 'प्रमाणं तृतीयेन वर्धयेत् तच्चतुर्थेनात्मचतुस्त्रिंशोनेन सविशेषः' इति।[12] अस्य सूत्रस्य गणितीयः अर्थः अस्ति $\sqrt{2} \approx 1 + 1/3$

+ 1/(3×4) - 1/(3×4×34) = 1.4142156... इति, यत् आधुनिकमूल्यात् (1.4142135...) केवलं 0.0000021 इत्यनेन भिन्नम् अस्ति। एतावती सूक्ष्मता प्राचीनकाले अत्यन्तम् आश्चर्यजनकी वर्तते। शुल्बसूत्रेषु अन्यानि अपि अनेकानि ज्यामितीयसूत्राणि प्राप्यन्ते यथा वर्गस्य विकर्णसूत्रम्, समद्विबाहुत्रिकोणस्य क्षेत्रफलसूत्रम्, वृत्तचतुर्भागसूत्रम् इत्यादीनि। एतानि सूत्राणि प्रत्यक्षतया वेदिनिर्माणार्थम् आसन्, किन्तु तेषु निहितं गणितीयज्ञानं सार्वभौमम् अस्ति।[12]

वैदिककाले संख्यापद्धतिः अपि अत्यन्तं विकसिता उन्नता च आसीत्। ऋग्वेदे दशसंख्यायाः गुणजानि (powers of ten) शतम् (10^2), सहस्रम् (10^3), अयुतम् (10^4), नियुतम् (10^5), प्रयुतम् (10^6) इत्यादीनि विशिष्टानि नामानि प्राप्यन्ते, यानि दशमानपद्धतेः अत्यन्तं प्राचीनत्वं सूचयन्ति।[17] यजुर्वेदे तु परार्धपर्यन्तं (10^{12}) संख्यानामानि प्रयुक्तानि। बौद्धग्रन्थे ललितविस्तरे बुद्धस्य गणनासामर्थ्यवर्णने 10^{53} पर्यन्तं संख्यानामानि उपलभ्यन्ते। एषा दशगुणोत्तरसंख्यापद्धतिः भारतीयगणितस्य अद्वितीयं विशिष्टं वैशिष्ट्यम् अस्ति, या कालान्तरे स्थानकमानपद्धत्याः (place-value notation) सुदृढम् आधारम् अस्थापयत्।[2] प्राचीनविश्वस्य अन्यासु सभ्यतासु यथा बैबिलोनिया, ईजिप्ट्, ग्रीस् इत्यादिषु एतावती विशाला व्यवस्थिता च संख्यापद्धतिः नोपलभ्यते।

पिङ्गलस्य छन्दःशास्त्रं (अनुमानतः तृतीयशताब्दी ख्रीष्टपूर्वम्) गणितेतिहासे अत्यन्तं महत्त्वपूर्णं अनन्यसाधारणं च योगदानम् अस्ति। पिङ्गलः छन्दसां गणनार्थम् एकां विशिष्टां सांख्यिकीयपद्धतिम् अविष्करोत्। सः लघुगुरुद्विमात्राणां (short-long binary syllables) विन्यासानां (combinations) गणनायाम् एकां क्रमबद्धां पद्धतिम् अस्थापयत्, या 'मेरुप्रस्तारः' इति नाम्ना प्रसिद्धा।[6] अयं मेरुप्रस्तारः (Meru Prastāra) पास्कल-त्रिकोणस्य (Pascal's triangle) सुस्पष्टं पूर्वरूपम् अस्ति, यस्य रचना ब्लेज् पास्कलतः (1623-1662) सहस्राधिकवर्षपूर्वम् अभवत्। पिङ्गलस्य लघु-गुरुद्विमात्रापद्धतिः (laghu-guru binary system) आधुनिकद्विमानपद्धतेः (binary system) प्रत्यक्षं पूर्वरूपम् इति अनेके विद्वांसः सप्रमाणं प्रतिपादयन्ति।[6] पिङ्गलः संचयसंख्यानां (combination numbers) गणनार्थम् अपि सूत्रं प्रदत्तवान्, यत् आधुनिकसंचयगणितस्य (combinatorics) आधारभूतम् अस्ति। एवं वैदिककालः भारतीयगणितस्य सुदृढं व्यापकं च आधारम् अस्थापयत्, यस्मिन् आधारे परवर्तिनः महान्तः गणितज्ञाः स्वकीयानि युगान्तरकारिणि कार्याणि सम्पन्नवन्तः।

वैदिककालस्य गणितस्य अन्यत् महत्त्वपूर्णम् अंशम् अस्ति जैनगणितपरम्परा। जैनगणितज्ञाः अनन्तस्य (infinity) विविधानि प्रकाराणि वर्गीकृतवन्तः एकतः अनन्तम्, द्वयतः अनन्तम्, बहुतः अनन्तम्, सर्वतः अनन्तम् इत्यादि भेदान् स्वीकृतवन्तः।[11] जैनगणिते बृहत्संख्यानां प्रति विशेषा रुचिः आकर्षणं च दृश्यते स्थानाङ्गसूत्रे (ख्रीष्टपूर्वं द्वितीयशताब्दी इति अनुमीयते) संख्यानां विभिन्नाः श्रेण्यः सविस्तरं वर्णिताः संख्येयम् (enumerable), असंख्येयम् (innumerable), अनन्तम् (infinite) इति त्रयः मुख्यभेदाः, तेषां प्रत्येकस्य पुनः उपभेदाः च विस्तरेण प्रतिपादिताः।[6] जैनपरम्परायां लघुगणकस्य (logarithm) आधारभूता अवधारणा 'अर्धच्छेदम्' इति नाम्ना प्राप्यते, यत्र संख्यायाः पुनः पुनः द्विभाजनेन (repeated halving) प्राप्तसंख्या निर्दिश्यते। एवं जैनगणितम् अपि वैदिककालीनभारतीयगणितपरम्परायाः एकं महत्त्वपूर्णम् अविभाज्यम् अङ्गम् आसीत्, यस्य योगदानं गणितेतिहासे उचितमान्यतां प्राप्नोति।

वैदिककालीनगणितस्य अन्यत् उल्लेखनीयं वैशिष्ट्यम् अस्ति तस्य व्यावहारिकस्वरूपम्। शुल्बसूत्राणि केवलं सैद्धान्तिकानि नासन्, अपितु प्रत्यक्षतया वेदिनिर्माणे प्रयोजनीयानि आसन्। यज्ञवेदीनां विविधाः आकृतयः गरुडवेदी, श्येनचितिः, कूर्मचितिः इत्यादयः अत्यन्तं जटिलानि ज्यामितीयज्ञानम् अपेक्षन्ते स्म।[12] एतासां वेदीनां निर्माणे क्षेत्रफलसमीकरणम् (equating areas of different shapes), आकृतिपरिवर्तनम् (transformation of geometric shapes), तथा अपरिमेयसंख्यानां (irrational numbers) अनुमानं च आवश्यकम् आसीत्। अतः शुल्बसूत्राणि ज्यामितेः प्राचीनतमं व्यावहारिकं प्रयोगं दर्शयन्ति, यत्र सिद्धान्तः प्रयोगश्च अविभक्ततया मिलितौ स्तः।[15] एवं वैदिककालस्य गणितं केवलं बौद्धिकव्यायामः नासीत्, अपितु धार्मिककर्मणां सम्पादनार्थम् अनिवार्यं साधनम् आसीत्, अतः तस्य विकासः सतत प्रेरितः पोषितश्च अभवत्।

3. शून्यस्य दशमानपद्धतेश्च आविष्कारः

शून्यस्य अवधारणा भारतीयसभ्यतायाः निर्विवादतया सर्वाधिकं महत्त्वपूर्णं सर्वाधिकं प्रभावशालि च गणितीययोगदानम् अस्ति। शून्यस्य दार्शनिकमूलानि भारतीयदर्शनस्य अनेकेषु सम्प्रदायेषु प्राप्यन्ते, विशेषतः बौद्धदर्शनस्य शून्यतावादे (śūnyatā doctrine) एषा अवधारणा गभीरतया विकसिता।[18] नागार्जुनस्य (c. 150-250 CE) माध्यमकदर्शने शून्यता सर्वपदार्थानां स्वभावशून्यतारूपेण प्रतिपादिता, या दार्शनिकचिन्तनस्य गणितीयचिन्तनस्य च सम्बन्धं दर्शयति। गणितक्षेत्रे शून्यं केवलं रिक्तस्थानसूचकम् (placeholder) एव नासीत्,

अपितु एका पूर्णतया स्वतन्त्रा संख्या (a number in its own right) इति स्वीकृतम् अभवत्, यया सह गणितक्रियाः (arithmetic operations) कर्तुं शक्यन्ते।[18] अन्यासु प्राचीनसभ्यतासु यथा बैबिलोनियायाम्, मायासभ्यतायां च रिक्तस्थानसूचकचिह्नानि आसन्, किन्तु शून्यं स्वतन्त्रसंख्यारूपेण केवलं भारते एव विकसितम् इति विद्वांसः एकमत्येन स्वीकुर्वन्ति।[17]

गणितशास्त्रे शून्यस्य प्रथमं स्पष्टं औपचारिकं च प्रतिपादनं ब्रह्मगुप्तस्य ब्राह्मस्फुटसिद्धान्ते (628 ख्रीष्टाब्दे) प्राप्यते, यत्र शून्येन सह गणितक्रियाणां नियमाः व्यवस्थितरूपेण सविस्तरं प्रतिपादिताः।[4] ब्रह्मगुप्तः प्रतिपादयति शून्यस्य शून्येन योगे शून्यमेव भवति, धनसंख्यायाः शून्ययोगे धनसंख्या एव तिष्ठति, ऋणसंख्यायाः शून्ययोगे ऋणसंख्या एव तिष्ठति। शून्येन गुणने सर्वदा शून्यमेव फलं भवति। शून्येन भाजने (division by zero) तु ब्रह्मगुप्तः 'खछेदम्' (fraction with zero denominator) इति संज्ञां प्रयुक्तवान्, यस्य सम्पूर्णं समाधानं कालान्तरे भास्कराचार्येण प्रतिपादितम्।[4] ग्वालियरशिलालेखे (876 ख्रीष्टाब्दे) शून्यसहिता संख्या 270 लिखिता अस्ति, यत् शून्यस्य व्यावहारिकप्रयोगस्य प्राचीनतमं शिलालेखीयं प्रमाणम् अस्ति।

दशमानस्थानकपद्धतिः (decimal place-value notation) भारतीयगणितस्य अन्यत् अत्यन्तं युगान्तरकारि विश्वपरिवर्तनकारि च योगदानम् अस्ति। अस्यां पद्धत्यां प्रत्येकस्य अङ्कस्य (digit) मूल्यं तस्य स्थानेन (positional value) निर्धार्यते एककस्थानम्, दशकस्थानम्, शतकस्थानम् इत्यादि।[17] केवलं दशभिः अङ्कैः (0-9) विश्वस्य सर्वाः संख्याः लेखितुं शक्यन्ते एतत् अस्याः पद्धतेः अद्भुतं सामर्थ्यम् अस्ति। रोमन-संख्यापद्धत्यां (Roman numerals), ग्रीक-संख्यापद्धत्यां, ईजिप्शियन-संख्यापद्धत्यां च एतादृशी सरलता नास्ति। भारतीया पद्धतिः अरबव्यापारिणां विद्वांसां च माध्यमेन पश्चिमएशियां प्राप्तवती।[19] अल्-ख्वारिज्मी (Al-Khwārizmī) नवमशताब्द्यां भारतीयसंख्यापद्धतिम् अरबभाषायां प्रतिपादितवान्। अल्-बीरूनी (Al-Bīrūnī) अपि स्वग्रन्थे भारतीयगणितस्य विस्तृतं विवरणम् अकरोत्। एवं भारतीयसंख्यापद्धतिः अरबदेशान् प्राप्य 'Hindu-Arabic numerals' इति नाम्ना सम्पूर्णे विश्वे प्रसृता, या अद्यापि समस्तविश्वे सर्वत्र प्रयुज्यते।[6] फिबोनाच्ची (Fibonacci) स्वग्रन्थे Liber Abaci (1202 ख्रीष्टाब्दे) भारतीयसंख्यापद्धतिं यूरोपदेशे प्रथमवारं व्यवस्थितरूपेण प्रचारितवान्।

4. आर्यभटस्य योगदानम्

आर्यभटः (476-550 ख्रीष्टाब्दः) भारतीयगणितस्य ज्योतिषशास्त्रस्य च इतिहासे एकः सर्वाधिकं प्रभावशाली सर्वाधिकम् आदरणीयश्च विद्वान् अस्ति। तस्य जन्मस्थानं कुसुमपुरम् (आधुनिकपाटलिपुत्रम्, पटना) इति अनुमीयते, यत्र सः नालन्दाविश्वविद्यालये अध्ययनम् अकरोत् इति केचन विद्वांसः मन्यन्ते। तस्य प्रमुखग्रन्थः आर्यभटीयं 499 ख्रीष्टाब्दे रचितम्, यत् 121 आर्याच्छन्दोबद्धश्लोकेषु चतुर्षु पादेषु विभक्तम् अस्ति गीतिकापादः (दशगीतिकापादः, 13 श्लोकाः), गणितपादः (33 श्लोकाः), कालक्रियापादः (25 श्लोकाः), गोलपादश्च (50 श्लोकाः)।[3] गीतिकापादे आर्यभटः ज्योतिषीयस्थिराङ्कानां (astronomical constants) संक्षिप्तं किन्तु अत्यन्तं सूक्ष्मं विवरणं ददाति, तथा च स्वकीयां विशिष्टां संख्यासंकेतपद्धतिं प्रतिपादयति। गणितपादे गणितसूत्राणि क्षेत्रफलगणना, घनफलगणना, वर्गमूलम्, घनमूलम्, श्रेणीगणितम् (arithmetic and geometric progressions) इत्यादीनि अत्यन्तं संक्षिप्तेषु 33 आर्याच्छन्दोबद्धसूत्रेषु प्रतिपादितानि।[5]

आर्यभटस्य π (पाई) इत्यस्य मूल्यानुमानं गणितेतिहासे अत्यन्तं विशेषतया उल्लेखनीयं प्रशंसनीयं च अस्ति। सः गणितपादे प्रतिपादयति 'चतुरधिकं शतमष्टगुणं द्वाषष्टिस्तथा सहस्राणाम्। अयुतद्वयविष्कम्भस्यासन्नो वृत्तपरिणाहः॥' इति।[3] अस्य सूत्रस्य सुस्पष्टः अर्थः अस्ति चतुरधिकं शतम् (104), अष्टगुणम् (×8 = 832), द्वाषष्टिसहस्राणि (62000), तयोः योगः = 62832। अयुतद्वयविष्कम्भस्य = 20000 व्यासस्य वृत्तस्य परिधिः 62832 अस्ति, अर्थात् $\pi = 62832/20000 = 3.1416$ इति। अत्र 'आसन्नः' इति शब्दप्रयोगः अत्यन्तं महत्त्वपूर्णः अस्ति आर्यभटः स्पष्टतया सूचयति यत् एतत् मूल्यम् अनुमानमात्रम् (approximation) अस्ति, यथार्थं (exact) नास्ति।[9] एषा जागरूकता π इत्यस्य अपरिमेयत्वस्य (irrationality) सूचनां ददाति, यत् यूरोपे 18-शताब्द्यां लाम्बर्ट् (Lambert, 1761) इत्यनेन प्रमाणितम्।

त्रिकोणमितिक्षेत्रे (trigonometry) आर्यभटस्य योगदानम् अत्यन्तं मौलिकं दूरगामि च अस्ति। सः ज्या (sine, यत् 'jyā' इति शब्दतः उद्भूतम्) इत्यस्य अर्धज्या (ardha-jyā, half-chord = sine) इत्यस्य च विस्तृतां सारणीं (table) प्रस्तुतवान्, या 24 मूल्यानि (3°45' इत्यस्य समानान्तरालेन) समाविशति।[9] अस्याः सारण्याः मूल्यानि अत्यन्तं सूक्ष्माणि परिशुद्धानि च सन्ति, यानि ज्योतिषीयगणनासु अत्यन्तम् उपयोगीनि आसन्। विशेषतया उल्लेखनीयम् अस्ति यत् 'sine' इति आधुनिकः आङ्ग्लशब्दः मूलतः संस्कृतस्य 'jyā' शब्दात् उद्भूतः jyā → jīva

(प्राकृतभाषायाम्) → jība (अरबभाषायाम्) → jaib (अरबलिप्यन्तरणे) → sinus (लैटिनभाषायां अनुवादे) → sine (आङ्ग्लभाषायाम्) इति।[1] एवम् आर्यभटस्य प्रभावः आधुनिकगणितशब्दावल्यां (mathematical terminology) अपि सुस्पष्टम् अस्ति। तकाओ हयाशी (Takao Hayashi) इत्यनेन आर्यभटस्य ज्यासारण्याः सम्पूर्णं विश्लेषणम् कृतम्, यत्र तस्य पद्धतेः सूक्ष्मता गणितीयसामर्थ्यं च प्रतिपादितम्।[9]

आर्यभटस्य अन्यत् अत्यन्तं महत्त्वपूर्णं दूरगामिप्रभावयुक्तं च योगदानम् अस्ति कुट्टकविधिः (kuṭṭaka method), या प्रथमकोटेः अनिर्धार्यसमीकरणानां (linear indeterminate equations) समाधानार्थम् उपयुज्यते।[5] ax + c = by इति रूपस्य समीकरणस्य पूर्णाङ्कसमाधानं (integer solution) प्राप्तुं कुट्टकविधिः क्रमशः भाजकप्रक्रियां (iterative division process) प्रयुज्य समाधानं व्यवस्थितरूपेण निर्गमयति। 'कुट्टक' इति शब्दस्य अर्थः 'कूटनं कर्ता' अथवा 'चूर्णनकर्ता' इति अस्ति, यतः अस्मिन् विधौ संख्याः क्रमशः लघुतराः क्रियन्ते। अयं विधिः यूरोपीयगणिते 'continued fraction algorithm' इति नाम्ना 17-शताब्द्यां प्रसिद्धस्य विधेः सुस्पष्टं पूर्वरूपम् अस्ति।[1] कुट्टकविधेः ज्योतिषशास्त्रे अत्यन्तम् उपयोगः आसीत् ग्रहस्थितिगणनायां, ग्रहणकालनिर्धारणे, कालगणनायां च।

आर्यभटः पृथिव्याः स्वाक्षभ्रमणम् (axial rotation) अपि सुस्पष्टतया प्रतिपादितवान्। गोलपादे सः लिखति 'अनुलोमगतिर्नौस्थः पश्यत्यचलं विलोमगम्। एवं लङ्कायां गतान् भान् पश्यत्युदयास्तमयान् सम्यक्' इति।[3] अस्य सूत्रस्य अर्थः अस्ति यथा नौकायां तिष्ठन् व्यक्तिः स्थिरान् वृक्षान् विपरीतदिशि गच्छतः इव पश्यति, तथैव पृथिवी भ्रमति अतः नक्षत्राणि विपरीतदिशि गच्छन्ति इव दृश्यन्ते। अयं सिद्धान्तः कोपर्निकसतः (Copernicus, 1473-1543) सहस्रवर्षपूर्वम् प्रतिपादितः, यद्यपि अयं सिद्धान्तः तत्कालीनभारतीयपरम्परायां सर्वैः विद्वद्भिः न स्वीकृतः आसीत्। ब्रह्मगुप्तः स्वयमेव आर्यभटस्य अस्य सिद्धान्तस्य खण्डनं कृतवान्।[1]

5. ब्रह्मगुप्तस्य योगदानम्

ब्रह्मगुप्तः (598-668 ख्रीष्टाब्दः) राजस्थानस्य भीनमालनगरे (आधुनिकभीनमाल) जन्म प्राप्तवान्, चापवंशस्य राज्ञः व्याघ्रमुखस्य राजज्योतिषी आसीत्। तस्य प्रमुखग्रन्थः ब्राह्मस्फुटसिद्धान्तः 628 ख्रीष्टाब्दे रचितः, यः 25 अध्यायेषु 1008 श्लोकेषु विभक्तः अस्ति।[4] अस्य ग्रन्थस्य द्वादशः अध्यायः (गणिताध्यायः) तथा अष्टादशः अध्यायः (कुट्टकाध्यायः) गणितेतिहासे विशेषतया अत्यन्तं महत्त्वपूर्णौ स्तः, यतः एतयोः अध्याययोः अनेकानि नवीनानि गणितसूत्राणि प्रतिपादितानि, यानि पूर्वगणितज्ञैः न प्रतिपादितानि आसन्।[1]

ब्रह्मगुप्तः प्रथमः गणितज्ञः अस्ति यः शून्येन (zero) ऋणसंख्याभिश्च (negative numbers) गणितक्रियाणां सम्पूर्णानि व्यवस्थितानि नियमानि प्रतिपादितवान्। सः ऋणसंख्याः 'ऋणम्' इति, धनसंख्याः 'धनम्' इति, शून्यं 'खम्' इति संज्ञाभिः व्यवहरति।[4] ब्रह्मगुप्तस्य नियमाः अत्यन्तं व्यवस्थिताः सन्ति ऋणम् ऋणेन गुणिते धनं भवति (negative × negative = positive), धनम् ऋणेन गुणिते ऋणं भवति (positive × negative = negative), शून्यं केनापि गुणिते शून्यमेव भवति (zero × anything = zero)। एते नियमाः आधुनिकगणिते यथावत् स्वीकृताः सन्ति। तथापि शून्येन भाजने (division by zero) ब्रह्मगुप्तस्य प्रतिपादनम् आधुनिकदृष्ट्या सम्पूर्णतया शुद्धं नासीत् सः शून्यं शून्येन भक्ते शून्यम् इति प्रतिपादितवान्, यत् आधुनिकगणिते 'अपरिभाषित' (undefined) इति स्वीकृतम्।[4]

ज्यामितिक्षेत्रे ब्रह्मगुप्तस्य सर्वाधिकं प्रसिद्धं कालातीतं च योगदानम् अस्ति चक्रीयचतुर्भुजस्य (cyclic quadrilateral) क्षेत्रफलसूत्रम्। यदि चक्रीयचतुर्भुजस्य भुजाः a, b, c, d सन्ति, अर्धपरिमितिः s = (a+b+c+d)/2 अस्ति, तर्हि क्षेत्रफलम् = √[(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)] इति।[1] एतत् सूत्रं हेरोन-सूत्रस्य (Heron's formula for triangle area) प्रत्यक्षं सामान्यीकृतरूपम् (generalization) अस्ति यदि d = 0 इति कल्पयामः (अर्थात् चतुर्भुजः त्रिकोणः भवति), तर्हि ब्रह्मगुप्तस्य सूत्रं हेरोनसूत्रमेव भवति। ब्रह्मगुप्तेन चक्रीयचतुर्भुजस्य विकर्णानां (diagonals) दैर्घ्यस्य सूत्रम् अपि प्रदत्तम्, तथा च चक्रीयचतुर्भुजस्य अनेकानि अन्यानि गुणधर्माः (properties) प्रतिपादिताः।[4] अपरं ब्रह्मगुप्तः 'ब्रह्मगुप्त-फिबोनाच्ची-सर्वसमिकाम्' (Brahmagupta-Fibonacci identity) अपि प्रतिपादितवान् $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$ इति। अस्याः सर्वसमिकायाः संख्यासिद्धान्ते (number theory) अत्यन्तम् उपयोगः वर्तते।

ब्रह्मगुप्तस्य अन्यत् अत्यन्तं महत्त्वपूर्णं योगदानम् अस्ति वर्गप्रकृतिसमीकरणानाम् (Pell's equation, $x^2 - Ny^2 = 1$) समाधानविधिः। सः 'भावना' (composition method) इति नामकेन विधिना एतादृशानां द्विघातअनिर्धार्यसमीकरणानां समाधानानि प्राप्तुम् उपायम् अदर्शयत्।[1] भावनाविधौ यदि $x^2 - Ny^2 = k_1$ तथा p^2

$- Nq^2 = k_2$ इत्येतयोः समीकरणयोः समाधानानि ज्ञातानि, तर्हि तयोः 'भावनया' (composition/combination) $x^2 - Ny^2 = k_1k_2$ इत्यस्य समीकरणस्य अपि समाधानं प्राप्तुं शक्यते। अयं विधिः अत्यन्तं शक्तिशाली अस्ति। उदाहरणार्थम्, $x^2 - 92y^2 = 1$ इत्यस्य समीकरणस्य समाधानं सः प्राप्तवान्, यस्य $x = 1151$, $y = 120$ इति मूल्ये स्तः।[2] एतत् समीकरणं यूरोपे 'Pell's equation' इति नाम्ना 17-शताब्द्यां प्रसिद्धम् अभवत् (यद्यपि 'Pell' इत्यस्य अस्मिन् समीकरणे कोऽपि विशेषः योगदानं नास्ति, ऑयलर् इत्यनेन भ्रमवशात् एतत् नाम दत्तम्), किन्तु वस्तुतः ब्रह्मगुप्तः सहस्रवर्षपूर्वमेव अस्य गहनम् अध्ययनम् आरभत। ब्राह्मस्फुटसिद्धान्तस्य अरबभाषायाम् अनुवादः 771 ख्रीष्टाब्दे अभवत्, यः अरबगणितस्य बीजगणितस्य च विकासे अत्यन्तं प्रभावशाली निर्णायकश्च अभवत्।[19]

6. भास्कराचार्यस्य योगदानम्

भास्कराचार्यः (भास्करः द्वितीयः, 1114-1185 ख्रीष्टाब्दः) महाराष्ट्रस्य विज्जडविडनगरे जातः, भारतीयगणितपरम्परायाः सर्वाधिकं प्रसिद्धः सर्वाधिकं बहुमुखप्रतिभाशाली च गणितज्ञः इति गण्यते। तस्य पिता महेश्वरः अपि विद्वान् ज्योतिषी आसीत्। भास्कराचार्यस्य प्रमुखग्रन्थः सिद्धान्तशिरोमणिः 1150 ख्रीष्टाब्दे रचितः, यः चतुर्षु विशालभागेषु विभक्तः अस्ति लीलावती (अङ्कगणितम्, arithmetic), बीजगणितम् (algebra), ग्रहगणितम् (planetary mathematics), गोलाध्यायः (spherical astronomy)।[4] एषः ग्रन्थः भारतीयगणितस्य सर्वाधिकं विस्तृतः व्यापकः एकीकृतश्च (most comprehensive and unified) ग्रन्थः इति सर्वैः विद्वद्भिः स्वीकृतम्।[1]

लीलावतीभागः भारतीयगणितग्रन्थेषु सर्वाधिकं लोकप्रियः विश्वप्रसिद्धश्च ग्रन्थः अस्ति, यतः अस्मिन् गणितसमस्याः कथारूपेण काव्यात्मकतया सरसतया च प्रस्तूयन्ते। परम्परानुसारं भास्कराचार्यः लीलावतीं स्वपुत्र्यै समर्पितवान्, तस्याः नाम्ना एव ग्रन्थं नामाङ्कितवान्। अस्मिन् ग्रन्थे अङ्कगणितम् (arithmetic), भिन्नसंख्यागणितम् (fractions), त्रैराशिकम् (rule of three), पञ्चराशिकम् (rule of five), क्रमचयसंचयौ (permutations and combinations), वर्गमूलम्, घनमूलम्, श्रेणीगणितम्, क्षेत्रगणितम् इत्यादीनि विषयाणि अत्यन्तं सुन्दरेषु मनोहरेषु पद्येषु प्रतिपादितानि।[4] उदाहरणार्थम् 'बाले लीलावति मतिमति कहे एकपञ्चांशभागः हंसानाम् अम्बुनिलये...' इत्यादिषु समस्यासु हंसानां भ्रमराणां हस्तिनां च संख्यागणनार्थं काव्यात्मकसमस्याः प्रस्तुताः। एतादृशाः समस्याः गणितशिक्षणं सरसं रोचकं च कुर्वन्ति, अतः लीलावती शताब्दीभिः यावत् भारतस्य सर्वाधिकं लोकप्रियः गणितपाठ्यग्रन्थः आसीत्।

बीजगणितभागे भास्कराचार्यः बीजगणितस्य (algebra) अनेकानि उन्नतसूत्राणि प्रतिपादितवान्। सः चक्रवालविधिं (cyclic method) प्रतिपादितवान्, यया वर्गप्रकृतिसमीकरणानां (Pell's equation) सर्वसामान्यसमाधानं प्राप्तुं शक्यते।[1] ब्रह्मगुप्तस्य भावनाविधेः विस्तारेण भास्कराचार्यः चक्रवालविधिना $x^2 - 61y^2 = 1$ इत्यस्य समीकरणस्य समाधानं प्राप्तवान्, यस्य $x = 1766319049$, $y = 226153980$ इति। एतत् अत्यन्तं विशालसंख्यात्मकं समाधानम् अस्ति, यत् यूरोपे फर्मा (Fermat) इत्यनेन 1657 ख्रीष्टाब्दे प्रश्नरूपेण प्रस्तुतम्, ऑयलर् (Euler) इत्यनेन लाग्राञ्ज् (Lagrange) इत्यनेन च सम्पूर्णतया समाधितम्।[2] किन्तु भास्कराचार्यः एतत् पञ्चशताब्दीभिः पूर्वमेव समाधितवान् इति अत्यन्तम् आश्चर्यजनकम्।

भास्कराचार्यस्य सर्वाधिकम् अद्भुतं युगान्तरकारि च योगदानम् अस्ति कलनगणितस्य (calculus) आधारभूतानां अवधारणानां प्रतिपादनम्। सः 'तात्कालिकगतिः' (tātkalika-gati, instantaneous velocity) इत्यस्य अवधारणां सिद्धान्तशिरोमण्याम् सुस्पष्टतया प्रतिपादितवान्।[13] ग्रहगणिते सः प्रदर्शयति यत् ग्रहस्य उच्चस्थाने (apogee) अधःस्थाने (perigee) च गतिपरिवर्तनस्य दरः (rate of change of velocity) शून्यः भवति यत् आधुनिककलनगणिते 'the derivative at a maximum or minimum is zero' इति मूलभूतसिद्धान्तस्य सुस्पष्टं पूर्वरूपम् अस्ति।[1] भास्कराचार्यः sin(x) इत्यस्य अवकलनम् (differentiation) अपि अपरोक्षतया प्रतिपादितवान् $d(\sin x)/dx \approx \cos x$ इति तस्य गणनायाः परिणामः दर्शयति।[13] तथा च सः अनन्तस्य (infinity) अवधारणां गणितीयरूपेण विवेचितवान् शून्येन भाजने अनन्तम् उत्पद्यते इति, तथा अनन्ते कस्यचित् संख्यायाः योगे अनन्तमेव तिष्ठति इति।[4] एतानि सर्वाणि योगदानानि न्यूटन-लैब्निज् (Newton-Leibniz) इत्येतयोः औपचारिककलनगणितविकासात् पञ्चशताब्दीभिः पूर्वम् अभवन्।

7. केरलीयगणितपरम्परा

केरलीयगणितपरम्परा (चतुर्दश-षोडशशताब्दी ख्रीष्टाब्दः) भारतीयगणितस्य सर्वाधिकम् उन्नतं सर्वाधिकं परिष्कृतं च अध्यायम् अस्ति, या विश्वगणितेतिहासे अत्यन्तं महत्त्वपूर्णा अद्वितीया च वर्तते। अस्याः परम्परायाः संस्थापकः आद्यप्रवर्तकश्च सङ्गमग्रामस्य माधवः (Mādhava of Saṅgamagrāma, अनुमानतः 1350-1425

ख्रीष्टाब्दः) अस्ति, यः अनन्तश्रेणीनां (infinite series) विकासे अभूतपूर्वम् अद्वितीयं च योगदानम् अकरोत्।[7] माधवः π इत्यस्य अनन्तश्रेणीं प्रतिपादितवान् $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots$ इति, या यूरोपे 'लैब्निज्-श्रेणी' (Leibniz series) इति नाम्ना प्रसिद्धा अस्ति। किन्तु माधवः गॉटफ्रीड् विल्हेल्म् लैब्निजतः (Leibniz, 1646-1716) लगभु त्रिशताब्दीभिः पूर्वम् एतां श्रेणीम् आविष्करोत् इति ऐतिहासिकतथ्यम्।[16] अपरं माधवः π इत्यस्य तीव्रतरसंकोचनं (faster convergence) प्रदातुम् संशोधनपदानि (correction terms) अपि प्रतिपादितवान्, यानि मूलश्रेण्याः सूक्ष्मतां बहुगुणीकुर्वन्ति।[20]

माधवः त्रिकोणमितीयफलनानाम् (trigonometric functions) अनन्तश्रेणीम् अपि प्रतिपादितवान्, याः विश्वगणितेतिहासे अत्यन्तं महत्त्वपूर्णाः सन्ति। $\sin(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \ldots$ तथा $\cos(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \ldots$ इत्येते श्रेणी यूरोपे 'न्यूटन-श्रेणी' (Newton series) अथवा 'टेलर-श्रेणी' (Taylor series) इति नाम्ना ज्ञायेते।[20] किन्तु माधवस्य पूर्वकार्यं ऐतिहासिकप्रमाणैः सुस्थापितम् अस्ति नीलकण्ठसोमयाजिनः, ज्येष्ठदेवस्य इत्यादीनां ग्रन्थेषु माधवस्य एतत् कार्यं स्पष्टतया उद्धृतम्।[7] नीलकण्ठसोमयाजिनः (1444-1544) तन्त्रसङ्ग्रहः अस्याः परम्परायाः अन्यः अत्यन्तं महत्त्वपूर्णः प्रभावशाली च ग्रन्थः अस्ति। अस्मिन् ग्रन्थे माधवस्य श्रेणीणां विस्तृतं विवेचनम् उपलभ्यते, तथा च ग्रहगतिसम्बन्धिनः अनेके नवीनसिद्धान्ताः प्रतिपादिताः।[7] नीलकण्ठः ग्रहगतेः एकं नवीनं प्रतिरूपं (model) प्रतिपादितवान्, यत्र बुधः शुक्रश्च सूर्यं परिभ्रमतः, सूर्यश्च पृथिवीं परिभ्रमति। एतत् प्रतिरूपं टाइको ब्राहे (Tycho Brahe) इत्यस्य प्रतिरूपस्य सदृशम् अस्ति, किन्तु नीलकण्ठः ब्राहेतः शताब्द्या पूर्वम् आसीत्।[20]

ज्येष्ठदेवस्य युक्तिभाषा (षोडशशताब्दी, अनुमानतः 1530 ख्रीष्टाब्दे) केरलीयपरम्परायाः सर्वाधिकम् उल्लेखनीयः ऐतिहासिकदृष्ट्या सर्वाधिकं महत्त्वपूर्णश्च ग्रन्थः अस्ति। अयं ग्रन्थः मलयालभाषायां (केरलस्य भाषा) रचितः, यत्र माधवस्य नीलकण्ठस्य च गणितसिद्धान्तानां विस्तृताः तर्कबद्धाः उपपत्तयः (mathematical proofs) प्रदत्ताः सन्ति।[13] युक्तिभाषा प्रथमः ज्ञातः ग्रन्थः अस्ति यत्र कलनगणितस्य (calculus) आधारभूतसिद्धान्तानां व्यवस्थितं प्रमाणबद्धं च प्रतिपादनं प्राप्यते यथा अनन्तश्रेणीनां अभिसरणम् (convergence of infinite series), समाकलनम् (integration), अवकलनम् (differentiation), तथा अनन्तसूक्ष्मराशीनां (infinitesimals) अवधारणा इत्यादीनि।[16] पी. पी. दिवाकरन् (P. P. Divakaran) इत्यनेन केरलीयगणितपरम्परायाः सम्पूर्णं पुनर्मूल्याङ्कनं कृतम्, यत्र तस्याः विश्वगणिते स्थानं सुस्पष्टीकृतम्।[13]

केरलीयगणितपरम्परायाः आविष्काराणां यूरोपीयगणितज्ञानां समानान्तरआविष्काराणां तुलनार्थम् अधः सारणी प्रस्तूयते। एषा सारणी दर्शयति यत् केरलीयगणितज्ञाः अनेकेषु क्षेत्रेषु यूरोपीयगणितज्ञेभ्यः शताब्दीभिः पूर्वम् एव महत्त्वपूर्णान् आविष्कारान् कृतवन्तः।

सारणी १: केरलीयगणितपरम्परायाः प्रमुखआविष्काराणां यूरोपीयसमानान्तराणां च कालानुक्रमिकतुलना

आविष्कारः	केरलीयगणितज्ञः	कालः (केरल)	यूरोपीयगणितज्ञः / कालः
π इत्यस्य अनन्तश्रेणी	माधवः	c. 1400	Leibniz, 1676
sin/cos इत्यस्य अनन्तश्रेणी	माधवः	c. 1400	Newton/Taylor, c. 1670-1715
π इत्यस्य तीव्रतरसंकोचनश्रेणी	माधवः	c. 1400	Euler, 18th century
कलनगणितस्य मूलतत्त्वानि	ज्येष्ठदेवः (युक्तिभाषा)	c. 1530	Newton/Leibniz, c. 1680
अनन्तश्रेणीसंशोधनपदानि	माधवः / नीलकण्ठः	c. 1400-1500	Euler, 18th century
ग्रहगतेः सूर्यकेन्द्रसूचनाः	नीलकण्ठः (तन्त्रसङ्ग्रहः)	c. 1500	Copernicus, 1543; Tycho, 1588
arctan इत्यस्य अनन्तश्रेणी	माधवः	c. 1400	Gregory, 1671

अतः केचन विद्वांसः सप्रमाणं प्रतिपादयन्ति यत् कलनगणितस्य वास्तविकः प्रारम्भिकः आविष्कारः केरले अभवत्, न तु यूरोपे।[16] सी. के. राजू (C. K. Raju) इत्यनेन तु प्रतिपादितं यत् केरलीयकलनगणितं जेसुइट्-मिशनरीणां माध्यमेन 16-शताब्द्यां प्रत्यक्षतया यूरोपं प्रापितम्, यत्र न्यूटन्-लैब्निज् इत्येतौ तस्य आधारेण स्वकीयं कार्यम् अकुर्वताम्। तथापि अस्य प्रत्यक्षसंचरणस्य निर्णायकं प्रमाणम् अद्यापि अनुपलब्धम् अस्ति, अतः बहवः विद्वांसः स्वतन्त्रआविष्कारसिद्धान्तम् (independent discovery theory) स्वीकुर्वन्ति।[16] यत्किमपि भवतु, केरलीयपरम्परायाः गणितीयसामर्थ्यं निर्विवादम् अस्ति, तस्याः विश्वगणितेतिहासे स्थानं सर्वैः स्वीकृतम्।

8. गणितस्य सूत्ररूपम्

भारतीयगणितपरम्परायाः एकं सर्वाधिकं विशिष्टं अन्यत्र अनुपलभ्यमानं च वैशिष्ट्यम् अस्ति गणितसूत्राणां पद्यरूपेण छन्दोबद्धतया रचना। प्राचीनभारते ज्ञानस्य संरक्षणं मुख्यतया मौखिकपरम्परया (oral tradition) क्रियते स्म, यतः लेखनसामग्रीणां (writing materials) दुर्लभता आसीत्, तथा च श्रुतिस्मृतिपरम्परायां मौखिकसंप्रेषणस्य

महत्त्वम् अधिकम् आसीत्।[14] अतः गणितसूत्राणां श्लोकरूपेण छन्दोबद्धा रचना अत्यन्तम् आवश्यकी व्यावहारिकी च आसीत्। आर्याच्छन्दः, अनुष्टुभ्छन्दः, वसन्ततिलकाच्छन्दः इत्यादिषु विविधेषु छन्दःसु रचितानि सूत्राणि सुगमतया कण्ठस्थीकरणयोग्यानि भवन्ति, गुरुशिष्यपरम्परया अविच्छिन्नतया प्रसरन्ति च। अस्याः पद्धतेः कारणेन सहस्रवर्षाणि यावत् गणितज्ञानं लिखितग्रन्थान् विना अपि जीवितम् अक्षुण्णम् अतिष्ठत्।[14] किन्तु पद्यरूपस्य एकः सन्निहितः दोषः अपि स्वीकर्तव्यः छन्दसः आवश्यकतया सूत्राणि अतिसंक्षिप्तानि भवन्ति, अतः भाष्यं (commentary) विना तेषां पूर्णं बोधनं कठिनं दुष्करं च भवति। अस्य कारणेन प्रत्येकं प्रमुखगणितग्रन्थे भाष्यपरम्परा अपि विकसिता यथा भास्करप्रथमस्य आर्यभटीयभाष्यम्, सूर्यदेवस्य भाष्यम् इत्यादि।[5]

संस्कृतगणितग्रन्थेषु संख्यानां पद्येषु समावेशार्थं द्वे विशिष्टे सांकेतिकपद्धती प्रयुक्ते। प्रथमा भूतसङ्ख्यापद्धतिः (bhūtasaṅkhyā system), यस्यां परिचितशब्दाः संख्यानां स्थाने प्रयुज्यन्ते यथा 'शशि/चन्द्र/इन्दु' = 1 (एकः चन्द्रः), 'नेत्र/अक्षि/बाहु' = 2 (द्वे नेत्रे), 'अग्नि/लोक/गुण' = 3 (त्रयः अग्नयः), 'वेद/समुद्र/युग' = 4 (चत्वारः वेदाः), 'बाण/इन्द्रिय/भूत' = 5 (पञ्च बाणाः), 'रस/ऋतु' = 6, 'अश्व/स्वर/ऋषि' = 7 इत्यादि।[8] एषा पद्धतिः छन्दसः आवश्यकतानुसारं संख्यानां पर्यायशब्दान् प्रयोक्तुं सौविध्यं ददाति।

द्वितीया कटपयादिपद्धतिः (Kaṭapayādi system), यस्यां व्यञ्जनाक्षराणि अङ्कानां स्थाने सुव्यवस्थितरूपेण प्रयुज्यन्ते।[8] अस्यां पद्धत्यां क=1, ख=2, ग=3, ... ञ=0; ट=1, ठ=2, ... न=0; प=1, फ=2, ... म=5; य=1, र=2, ल=3, व=4, श=5, ष=6, स=7, ह=8 इत्यादि नियमाः सन्ति (विभिन्नाः पाठभेदाः अपि उपलभ्यन्ते)। केरलीयपरम्परायाम् एषा पद्धतिः विशेषतया व्यापकतया प्रचलिता आसीत्।[8] माधवस्य π इत्यस्य अत्यन्तं सूक्ष्मं मूल्यं 'विबुधनेत्रगजाहिहुताशनत्रिगुणवेदभवारणबाहवः। नवनिखर्वमिते वृतिविस्तरे परिधिमानमिदं जगदुर्बुधाः॥' इति श्लोकेन कटपयादिपद्धत्या सङ्केतितम् अस्ति।[8] अस्य श्लोकस्य कटपयादिविश्लेषणेन $\pi = 2827433388233/9\times10^{11} = 3.14159265358979...$ इत्येतत् 11 दशांशस्थानपर्यन्तं सूक्ष्मं मूल्यं प्राप्यते। एवं सांकेतिकपद्धतयः गणितस्य काव्यस्य च अद्भुतं सुन्दरं च सम्मेलनं कुर्वन्ति, यत् भारतीयगणितपरम्परायाः विशिष्टं सांस्कृतिकं वैशिष्ट्यम् अस्ति।

9. ज्योतिषशास्त्रे गणितस्य उपयोगः

भारतीयज्ञानपरम्परायां गणितं ज्योतिषशास्त्रं च परस्परम् अन्योन्याश्रिते विद्ये आस्ताम्, ययोः विकासः सह एव अभवत्। प्रायः सर्वे प्रमुखभारतीयगणितज्ञाः ज्योतिषशास्त्रज्ञाः अपि आसन्, तेषां ग्रन्थाः 'सिद्धान्तः' इति नाम्ना ज्ञायन्ते, यत्र गणितं ज्योतिषं च अविभक्ततया सह प्रतिपाद्यते।[1] सूर्यसिद्धान्तः (अनुमानतः चतुर्थ-पञ्चमशताब्दी ख्रीष्टाब्दः, परवर्तिपरिष्कारैः सह) भारतीयज्योतिषसिद्धान्तपरम्परायाः सर्वाधिकं प्रभावशाली उपलब्धग्रन्थः अस्ति, यत्र त्रिकोणमितीयसूत्राणि, ग्रहगतिसमीकरणानि, ग्रहणगणनाविधयः, तथा च खगोलीयस्थिराङ्काश्च विस्तरेण प्रतिपादिताः।[11] वराहमिहिरस्य पञ्चसिद्धान्तिका पञ्चानां प्राचीनसिद्धान्तानां सारसङ्ग्रहः अस्ति, या भारतीयज्योतिषपरम्परायाः विकासं सुस्पष्टतया दर्शयति।

गोलीयत्रिकोणमितिः (spherical trigonometry) भारतीयज्योतिषगणितस्य अत्यन्तं महत्त्वपूर्णः केन्द्रीयश्च अंशः अस्ति। खगोलीयपिण्डानां (celestial bodies) स्थितिनिर्धारणार्थं, सूर्योदयसूर्यास्तमयकालगणनार्थम्, नक्षत्राणां उदयास्तमयनिर्धारणार्थम्, दक्षिणोत्तरांशयोः (latitude-longitude) परिशुद्धगणनार्थं च गोलीयत्रिकोणमितेः विशेषज्ञानस्य प्रयोगः अनिवार्यः आसीत्।[1] आर्यभटः ज्यासारणीम् (sine table) प्रस्तुत्य अस्य क्षेत्रस्य सुदृढम् आधारम् अस्थापयत्। ततः परं वराहमिहिरः, ब्रह्मगुप्तः, भास्कराचार्यश्च ज्यासारण्याः विस्तारं परिष्कारं च अकुर्वन्, कोज्या (cosine), उत्क्रमज्या (versed sine) इत्यादीनां फलनानां सारण्यः अपि निर्मितवन्तः।[9] ग्रहणगणना (eclipse calculation) भारतीयज्योतिषगणितस्य एका अत्यन्तं प्रमुखा व्यावहारिकदृष्ट्या अत्यन्तं महत्त्वपूर्णा च उपलब्धिः आसीत्। आर्यभटः ग्रहणस्य वैज्ञानिकं कारणं पृथिव्याः छायया चन्द्रग्रहणम्, चन्द्रस्य सूर्यस्य पुरतः आगमनेन सूर्यग्रहणं च सुस्पष्टतया प्रतिपादितवान्।[3]

पञ्चाङ्गगणना (calendar computation, pañcāṅga) भारतीयसमाजे गणितस्य सर्वाधिकं व्यापकः प्रत्यक्षः व्यावहारिकः च प्रयोगः आसीत्। पञ्चाङ्गे पञ्च अङ्गानि सन्ति तिथिः (lunar day), वारः (weekday), नक्षत्रम् (lunar mansion), योगः (sun-moon angular relationship), करणम् (half-tithi) च। एतेषां पञ्चानाम् अङ्गानां प्रतिदिनं परिशुद्धा गणना उन्नतगणितसूत्राणां ज्ञानम् अपेक्षते।[11] प्रतिदिनं सूर्यचन्द्रयोः सर्वेषां ग्रहाणां च स्थितिगणना करणीया, तिथ्यादीनां निर्णयः कर्तव्यः, उत्सवमुहूर्तादीनां निर्धारणं कर्तव्यम्, विवाहादिशुभकार्याणां मुहूर्तनिर्णयः कर्तव्यः एतत् सर्वं गणितमूलकम् आसीत्। एवं ज्योतिषशास्त्रस्य सामाजिकधार्मिकआवश्यकता भारते

गणितविद्यायाः निरन्तरं प्रगतिशीलं विकासम् अप्रेरयत् अपोषयत् च। सिद्धान्तपरम्परायाः ग्रन्थाः केवलं ज्योतिषग्रन्थाः नासन्, अपितु गणितशास्त्रस्य सम्पूर्णकोशग्रन्थाः (encyclopedias of mathematics) अपि आसन्, येषु अनेकविधानि विविधानि गणितसूत्राणि सुव्यवस्थिततया संगृहीतानि।[1]

ज्योतिषशास्त्रे गणितस्य उपयोगस्य अन्यत् महत्त्वपूर्णम् उदाहरणम् अस्ति ग्रहमध्यमस्थितिगणना (mean planetary position calculation) तथा ग्रहस्पष्टस्थितिगणना (true planetary position calculation)। भारतीयज्योतिषगणितज्ञाः ग्रहाणां मध्यमगतिं (mean motion) ज्ञात्वा मन्दफलम् (equation of center) शीघ्रफलं (equation of conjunction) च योजयित्वा ग्रहस्य वास्तविकस्थितिं गणयन्ति स्म।[11] अस्मिन् कार्ये त्रिकोणमितीयसूत्राणां ज्यासारण्याश्च प्रयोगः अनिवार्यः आसीत्। आर्यभटः 'मन्दसमीकरणम्' (manda equation) प्रतिपादितवान्, यत्र epicyclic model इत्यस्य प्रयोगेण ग्रहस्य अनियमितगतिः (anomalistic motion) गणिता भवति। ब्रह्मगुप्तः भास्कराचार्यश्च एतेषां गणनाविधीनां परिष्कारं विस्तारं च कृतवन्तौ, येन ग्रहणकालस्य पूर्वानुमानं अत्यन्तं सूक्ष्मतया कर्तुं शक्यम् अभवत्।[3] एवं ज्योतिषगणितं भारतीयगणितस्य सर्वाधिकं व्यापकः सर्वाधिकं दीर्घकालीनश्च अनुप्रयोगः (application) आसीत्।

भारतीयज्योतिषगणिते महावीराचार्यस्य (नवमशताब्दी ख्रीष्टाब्दः) योगदानम् अपि स्मरणीयम्। तस्य 'गणितसारसङ्ग्रहः' इति ग्रन्थः भारतीयगणितस्य सर्वाधिकं व्यवस्थितः पाठ्यग्रन्थसदृशः ग्रन्थः अस्ति, यत्र अङ्कगणितम्, ज्यामितिः, बीजगणितम् इत्यादीनि विषयाणि क्रमबद्धतया प्रतिपादितानि।[11] महावीरः जैनगणितपरम्परायाः प्रमुखः प्रतिनिधिः आसीत्। सः संचयगणितस्य (combinatorics) अनेकानि सूत्राणि प्रतिपादितवान्, तथा च ऋणसंख्यानां वर्गमूलस्य असम्भवत्वं (non-existence of square root of negative numbers) प्रथमवारं स्पष्टतया प्रतिपादितवान्।[2] श्रीधराचार्यः (दशमशताब्दी) अपि पाटीगणिते (arithmetic) महत्त्वपूर्णं योगदानम् अकरोत् तस्य 'पाटीगणितम्' इति ग्रन्थे द्विघातसमीकरणानां (quadratic equations) सामान्यसमाधानसूत्रम् (general solution formula, quadratic formula) सुस्पष्टतया प्रतिपादितम् अस्ति।[1] एवं आर्यभट-ब्रह्मगुप्त-भास्कराचार्यातिरिक्तम् अपि अनेके गणितज्ञाः भारतीयगणितपरम्परायां महत्त्वपूर्णं योगदानम् अकुर्वन्।

10. विश्वगणिते भारतीययोगदानस्य प्रभावः

भारतीयगणितस्य विश्वगणिते सुदूरप्रसारी प्रभावः मुख्यतया अरबविद्वद्भिः अरबव्यापारिणां च माध्यमेन सञ्जातः। अष्टमशताब्द्यां ख्रीष्टाब्दे बगदादनगरे अब्बासीयखलीफायाः शासनकाले 'बैत-अल्-हिक्मा' (House of Wisdom) इति विद्याकेन्द्रे भारतीयग्रन्थानां ग्रीकग्रन्थानां च अरबभाषायाम् अनुवादः व्यवस्थितरूपेण आरब्धः।[19] 771 ख्रीष्टाब्दे एकः भारतीयविद्वान् बगदादं गतवान्, तेन सह ब्राह्मस्फुटसिद्धान्तस्य प्रतिलिपिः आसीत्, या अरबभाषायाम् 'सिन्धिन्द' इति नाम्ना अनूदिता। अल्-ख्वारिज्मी (Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī, c. 780-850) भारतीयसंख्यापद्धतिं गणितविधींश्च अरबजगति सविस्तरं प्रचारितवान्।[6] तस्य 'Kitāb al-Ḥisāb al-Hindī' इति ग्रन्थः भारतीयदशमानपद्धतिम् अरबविश्वाय परिचितां कृतवान्, ततः 'algorithm' इति शब्दः अल्-ख्वारिज्मीनामतः उद्भूतः, तथा 'algebra' इति शब्दः तस्य अन्यस्य ग्रन्थस्य 'अल्-जब्र' इति नामतः उद्भूतः।

अल्-बीरूनी (Abū Rayḥān al-Bīrūnī, 973-1048) मध्यकालस्य सर्वाधिकं विद्वान् बहुभाषाविद् (polymath) आसीत्, यः भारतम् आगत्य संस्कृतं शिक्षित्वा स्वकीये 'Kitāb al-Hind' (तारीख-अल्-हिन्द्) इति विशालग्रन्थे भारतीयगणितस्य ज्योतिषशास्त्रस्य दर्शनस्य च विस्तृतं विवेचनम् अकरोत्।[10] अल्-बीरूनी भारतीयगणितस्य सूक्ष्मतां प्रशंसितवान्, तथा च भारतीयगणितज्ञानां ऋणसंख्यापद्धतेः शून्यविद्यायाः च महत्त्वं प्रतिपादितवान्।[19] भारतीयगणितस्य अरबजगति प्रभावः अत्यन्तं गहनः व्यापकश्च आसीत् अरबगणितज्ञाः भारतीयपद्धतीः स्वीकृत्य तासां विस्तारं परिष्कारं च अकुर्वन्।

भारतीयसंख्यापद्धतिः अरबदेशात् यूरोपं प्राप्य तत्र गणितस्य सम्पूर्णं कायाकल्पम् (revolution) अकरोत्। इटलीदेशीयः लियोनार्दो फिबोनाच्ची (Leonardo Fibonacci, c. 1170-1250) उत्तरआफ्रिकायां व्यापारार्थं गतवान्, तत्र अरबविद्वद्भ्यः भारतीय-अरबसंख्यापद्धतिम् अधीतवान्, ततः स्वग्रन्थे Liber Abaci (1202 ख्रीष्टाब्दे) एतां पद्धतिं यूरोपदेशे प्रथमतया व्यवस्थितरूपेण प्रचारितवान्।[6] तत्पूर्वं यूरोपे रोमन-संख्यापद्धतिः (Roman numerals: I, V, X, L, C, D, M) प्रचलिता आसीत्, या गणनार्थम् गुणनार्थम् भाजनार्थं च अत्यन्तं कठिना दुष्करा च आसीत्। भारतीयपद्धत्याः स्वीकारेण गणना अत्यन्तं सरला सुगमा च सम्पन्ना, यद् वाणिज्ये वैज्ञानिकगवेषणे लेखाविद्यायां च महान् क्रान्तिकारी परिवर्तनम् आनयत्।[17] 'Hindu-Arabic numerals' इति अद्यापि प्रचलितं

नामकरणम् भारतीयमूलस्य अरबमाध्यमस्य च उभयोः ऐतिहासिकयोगदानस्य स्वीकृतिं दर्शयति। अद्य विश्वस्य प्रत्येकं देशे प्रत्येकं भाषायां च एषा संख्यापद्धतिः प्रयुज्यते, या मूलतः भारतीयमानसस्य सृजनशीलतायाः फलम् अस्ति।

आधुनिककाले भारतीयगणितस्य ऐतिहासिकयोगदानस्य मान्यता सम्मानश्च क्रमशः निरन्तरं वर्धमानौ स्तः। किम् प्लोफ्कर (Kim Plofker) स्वग्रन्थे 'Mathematics in India' इत्यस्मिन् भारतीयगणितस्य सम्पूर्णम् इतिहासं सुव्यवस्थितरूपेण प्रतिपादितवती।[1] जॉर्ज घेवर्घीस जोसेफ (George Gheverghese Joseph) स्वग्रन्थे 'The Crest of the Peacock' इत्यस्मिन् गणितस्य यूरोपकेन्द्रितइतिहासलेखनस्य समीक्षां कृत्वा भारतस्य चीनस्य अन्येषां सभ्यतानां च योगदानं प्रकाशितवान्।[6] पी. पी. दिवाकरन् (P. P. Divakaran) इत्यनेन भारतीयगणितस्य अवधारणानां विधीनां सम्बन्धानां च गहनं विश्लेषणं कृतम्।[13] विशेषतः केरलीयपरम्परायाः कलनगणितसम्बन्धिनः आविष्काराः न्यूटन-लैब्निज्-पूर्वकार्यरूपेण विश्वस्य गणितेतिहासकारैः मान्यतां प्राप्नुवन्ति।[16] तथापि भारतीयगणितस्य स्वतन्त्रः मौलिकः बहुमुखश्च विकासः सम्पूर्णतया निर्विवादः अस्ति, तथा च तस्य विश्वगणिते प्रत्यक्षः परोक्षश्च सुदूरप्रसारी प्रभावः आधुनिकविद्वद्भिः सर्वत्र सुस्पष्टतया स्वीकृतः अस्ति।

भारतीयगणितस्य विश्वप्रभावस्य एकं विशेषम् आयामं (dimension) अस्ति गणितशब्दावल्यां (mathematical terminology) भारतीयप्रभावः। 'sine' (jyā → jība → sinus) इत्यस्य अतिरिक्तम्, 'zero' (śūnya → ṣifr → zephirum → zero), 'cipher' (śūnya → ṣifr → cipher), 'algorithm' (al-Khwārizmī, यः भारतीयपद्धतिं प्रचारितवान्) इत्यादयः शब्दाः प्रत्यक्षतया परोक्षतया वा भारतीयगणितपरम्परायां मूलं धारयन्ति।[17] अपरं भारतीयसंख्याचिह्नानि (numeral symbols) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 यद्यपि कालक्रमेण रूपान्तरं प्राप्तवन्ति, मूलतः ब्राह्मीलिपेः संख्याचिह्नेभ्यः विकसितानि।[17] एवं भारतीयगणितस्य प्रभावः केवलं सैद्धान्तिकक्षेत्रे न, अपितु गणितस्य भाषायां संकेतपद्धत्यां दैनन्दिनव्यवहारे च सर्वव्यापी अस्ति। अद्य विश्वस्य सर्वे वैज्ञानिकाः, अभियन्तारः, वणिजः, छात्राश्च प्रतिदिनं भारतीयमूलकसंख्यापद्धतिं प्रयुञ्जते, यद्यपि बहवः अस्याः पद्धतेः भारतीयमूलं न जानन्ति।[6] भारतीयगणितस्य एतत् सार्वभौमिकं योगदानं मानवसभ्यतायाः इतिहासे सर्वाधिकं प्रभावशालिषु बौद्धिकयोगदानेषु अन्यतमम् अस्ति इति निर्विवादम्।

11. उपसंहारः

संस्कृतवाङ्मये गणितशास्त्रस्य योगदानं अत्यन्तं विशालं गभीरं बहुआयामी च अस्ति। वैदिककालस्य शुल्बसूत्रेभ्यः आरभ्य मध्यकालस्य केरलीयगणितपरम्परापर्यन्तं सहस्रद्वयाधिककालं यावत् भारतीयगणितज्ञाः संस्कृतभाषायां पद्यरूपेण गणितज्ञानस्य अमूल्यं अतुलनीयं च भण्डारम् अरचयन्। शुल्बसूत्राणि ज्यामितेः आधारम् अस्थापयन्, बौधायनस्य प्रमेयः कर्णसम्बन्धं प्रथमतया दर्शितवान्, शून्यस्य आविष्कारः संख्यापद्धत्याः क्रान्तिकारी परिवर्तनम् आनयत्, दशमानस्थानकपद्धतिः गणनां सरलां सुगमां च कृतवती।[1,6] आर्यभटः त्रिकोणमितेः कुट्टकविधेश्च माध्यमेन गणितज्योतिषयोः सम्बन्धम् अगाधीकरोत्, ब्रह्मगुप्तः शून्यऋणसंख्यागणितं चक्रीयचतुर्भुजसूत्रं च प्रतिपाद्य गणितं समृद्धीकरोत्, भास्कराचार्यः कलनगणितस्य बीजानि वपन् गणितं काव्येन सह मिश्रयित्वा गणितशिक्षणस्य नवीनं प्रतिमानम् अस्थापयत्।[2,4] केरलीयपरम्परा अनन्तश्रेणीनां कलनगणितस्य च क्षेत्रे विश्वगणिते अग्रणी योगदानम् अकरोत्।[16] एतानि सर्वाणि योगदानानि विश्वगणितस्य सम्पूर्णे विकासे आधारशिलारूपाणि दीपस्तम्भरूपाणि च अभवन्। भारतीयगणितं केवलं भारतस्य गौरवम् एव नास्ति, अपितु सम्पूर्णमानवसभ्यतायाः साझी बौद्धिकसम्पत्तिः विरासतिश्च अस्ति।

संस्कृतभाषा गणितज्ञानस्य वाहिकारूपेण संरक्षिकारूपेण च अद्वितीयां अनन्यसाधारणां भूमिकां निरवहत्। छन्दोबद्धसूत्राणि, भूतसङ्ख्यापद्धतिः, कटपयादिसंकेतपद्धतिश्च गणितस्य भाषायाश्च अद्भुतं सुन्दरं सर्जनात्मकं च सम्मेलनं प्रदर्शयन्ति यत् विश्वस्य अन्यासु गणितपरम्परासु विरलम् एव दृश्यते।[14] अद्यापि संस्कृतगणितग्रन्थेषु अनेकानि सूत्राणि अनन्वेषितानि अनुद्घाटितानि च तिष्ठन्ति, अनेकानि भाष्याणि आधुनिकभाषासु अनूदितानि न सन्ति, अनेकाः मूल्यवत्यः पाण्डुलिप्यः अप्रकाशिताः ग्रन्थालयेषु वर्तन्ते।[13] एतेषां ग्रन्थानां सम्यक् वैज्ञानिकम् अध्ययनं व्यवस्थितं संरक्षणं सुलभं प्रकाशनं च अत्यन्तम् आवश्यकम् अत्यावश्यकं च अस्ति, येन भारतीयगणितपरम्परायाः सम्पूर्णं वास्तविकं स्वरूपं विश्वसमक्षम् आगच्छेत्। संस्कृतगणितपरम्परायाः गहनम् अध्ययनम् न केवलं गणितेतिहासस्य दृष्ट्या, अपितु गणितशिक्षायाः गणितदर्शनस्य विज्ञानेतिहासस्य च दृष्ट्या अत्यन्तं लाभदायकं ज्ञानवर्धकं प्रेरणादायकं च भवेत्। यतः अस्याः परम्परायाः सम्यक् अध्ययनेन गणितस्य मानवसभ्यतायां केन्द्रीयभूमिकायाः विषये गभीरतरं ज्ञानं सम्भवति, गणितस्य सांस्कृतिकसन्दर्भस्य बोधः वर्धते, तथा च ज्ञानस्य सार्वभौमिकस्वरूपस्य अवबोधः सुदृढः भवति।

संदर्भसूची

1. Plofker, Kim. Mathematics in India. Princeton: Princeton University Press, 2009.
2. Datta, Bibhutibhushan, and Avadhesh Narayan Singh. History of Hindu Mathematics: A Source Book. 2 vols. Bombay: Asia Publishing House, 1962.
3. Āryabhaṭa. Āryabhaṭīya. Translated by Walter Eugene Clark. Chicago: University of Chicago Press, 1930.
4. Colebrooke, Henry Thomas. Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara. London: John Murray, 1817.
5. Keller, Agathe. Expounding the Mathematical Seed: A Translation of Bhāskara I on the Mathematical Chapter of the Āryabhaṭīya. 2 vols. Basel: Birkhäuser, 2006.
6. Joseph, George Gheverghese. The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics. 3rd ed. Princeton: Princeton University Press, 2011.
7. Ramasubramanian, K., and M. S. Sriram. Tantrasaṅgraha of Nīlakaṇṭha Somayājī. London: Springer, 2011.
8. Sarma, Sreeramula Rajeswara. "The Kaṭapayādi System of Numerical Notation and Its Spread Outside Kerala." Revue d'histoire des mathématiques 18, no. 1 (2012): 37–66.
9. Hayashi, Takao. "Āryabhaṭa's Rule and Table for Sine-Differences." Historia Mathematica 24, no. 4 (1997): 396–406.
10. Pingree, David. "The Logic of Non-Western Science: Mathematical Discoveries in Medieval India." Daedalus 132, no. 4 (2003): 45–53.
11. Bag, A. K. Mathematics in Ancient and Medieval India. Varanasi: Chowkhamba Oriental Research Studies, 1979.
12. Sen, S. N., and A. K. Bag. The Śulbasūtras. New Delhi: Indian National Science Academy, 1983.
13. Divakaran, P. P. Mathematics of India: Concepts, Methods, Connections. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2018.
14. Filliozat, Pierre-Sylvain. "Ancient Sanskrit Mathematics: An Oral Tradition and a Written Literature." In History of Science, History of Text, edited by Karine Chemla, 137–157. Dordrecht: Springer, 2004.
15. Staal, Frits. "Greek and Vedic Geometry." Journal of Indian Philosophy 27, nos. 1–2 (1999): 105–127.
16. Raju, C. K. Cultural Foundations of Mathematics: The Nature of Mathematical Proof and the Transmission of the Calculus from India to Europe in the 16th c. CE. Delhi: Pearson Longman, 2007.
17. Ifrah, Georges. The Universal History of Numbers. Translated by David Bellos et al. New York: John Wiley & Sons, 2000.
18. Kaplan, Robert. The Nothing That Is: A Natural History of Zero. New York: Oxford University Press, 2000.
19. Burnett, Charles. "The Semantics of Indian Numerals in Arabic, Greek and Latin." Journal of Indian Philosophy 34 (2006): 15–30.
20. Ramasubramanian, K., M. D. Srinivas, and M. S. Sriram. "Modification of the Earlier Indian Planetary Theory by the Kerala Astronomers and the Implied Heliocentric Picture of Planetary Motion." Current Science 66, no. 10 (1994): 784–790.